Einführung in die Integralrechnung

Teil 1

Verwendung der Potenzregel zur Berechnung von Stammfunktionen

atei Nr. 48u

nd 2 Dezember 2019

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

DEMO

Stoff-Verteilung zur Integration

Grundniveau - Gymnasium

Datei Nr. 48011 Teil 1 — Einführung in die Grundlagen:

- Änderungen und Differenziale
  Lineare Änderungen / Nicht-lineare Änderungen
- Lineare Änderungen auf der Tangente - Differenzialbegriff
- Das unbestimmte Integral – Stammfunktionen - Grundintegral 1

Datei Nr. 48012 Teil 2: — Integrationsregeln
Unbestimmte Integrale für ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen mit vielen Substitutionsarten. Umfa[illegible]ungsmaterial

Datei Nr. 48013 Teil 3 — Das bestimmte Integral für Potenzfunktione[illegible] ganzrationale [illegible] gebrochen rationale Funktionen, auch mit Substitutio[illegible]

Datei Nr. 48014 Teil 4 — Integration von Wurzelfunktionen (1)

Datei Nr. 48030 — Grundniveau für einfache Anfo[illegible]ungen: [illegible]ischtes Trainings[illegible]t

Gründlichen Wiederholen und [illegible]: Pote[illegible]ktione[illegible]tionale Funktionen, Wurzel-, Exponentia[illegible] und [illegible]onometri[illegible]ktionen.

Datei Nr. 48015 Teil 5 — Partielle Integrati[illegible]lles

Datei Nr. 45041 Teil 6 — Exponentialfunktio[illegible]alles

Datei Nr. 46041 Teil 7 — Ln-Fu[illegible]onen alles

Datei Nr. 48016 Teil 8 — T[illegible]onometrisch[illegible]unktionen [illegible]

Datei Nr. 48040 — [illegible]blatt: [illegible]e wichtigsten Integrale

[illegible]heres N[illegible]au (Studium)

[illegible]rochen [illegible]len Funktionen:

Date[illegible] 48050 — Inte[illegible]tionsmethoden - Übersicht

Datei N[illegible]051 — Integ[illegible]on mit Partialbruchzerlegung

Datei Nr. 48[illegible] — Re[illegible]ionsformel bzw. Umgekehrte partielle Integration

Datei Nr. 48055 — [illegible]gration mit arctan-Funktionen

Datei Nr. 48060 — Sammlung schwerer Integrale

Datei Nr. 48056 — Integration von Wurzelfunktionen (2) mit arcsin-Funktionen

Datei Nr. 48070 — Integration von Wurzelfunktionen (3): Substitutionen mit sin und sinh

Datei Nr. 48057 — Integration der Arkusfunktionen

Datei Nr. 48061 — Schwierige Integrale Aufgabensammlung

DEMO

Vorwort

Hier findet der Leser eine Einführung in die Technik des Integrierens. Auf Anwendungen wie Flächenberechnungen wird noch nicht eingegangen. Für Anfänger bestens geeignet.

Inhalt dieses Textes

1 Das unbestimmte Integral – **Allgemeine** Stammfunktion 4

1.1 Grundsätzliches, was man wissen muss 4

1.2 Potenzregel zum Aufleiten 5

Trainingsaufgaben 1 bis 4 8

2 **Bestimmte** Stammfunktionen 9

Trainingsaufgaben 5 und 6 10

Lösungen der Trainingsaufgaben 11 - 16

DEMO

1 Das unbestimmte Integral – allgemeine Stammfunktionen

1.1 Grundsätzliches, was man wissen muss

Will man die Ableitung einer Funktion rückgängig machen, muss man eine Rechnung durchführen, die man auch „aufleiten“ nennt. Der eigentliche Fachausdruck dafür heißt Integrieren.
Formal sieht das so aus:

$y = f(x)$ wird durch Ableiten $y' = f'(x)$ bzw. das Differenzial $dy = f'(x) \cdot dx$ (1)

Die Aufgabe, das Differential rückgängig zu machen, hat zu einer neuen Schreibweise geführt.
Man sagt, „***das Integral macht das Differential rückgängig***“ und sch[illegible]

$$\boxed{\int dy = y} \qquad (2)$$

Bis jetzt ist dies eine formale Schreibweise, die wir mit Leben füller[illegible]ollen.
Zunächst erinnern wir uns daran, dass das Differential so [illegible]efiniert w[illegible]
Ersetzt man darin dy mittels (1), dann folgt:

$$\boxed{\int f'(x)\,dx = y} \qquad (3)$$

Oder aber, weil y = f(x) ist: $f(x) = \int f'(x)\,dx$ [illegible]

Man nennt die durch Integrieren (/ zw. Auf[illegible]n) ge[illegible]ene [illegible]unktion eine Stammfunktion.
In der Gleichung (4) ist $f(x)$ ei[illegible]Stammfunktio[illegible] $f'(x)$.

Das folgen[illegible] Beisp[illegible] zeigt ein dabei entstehendes Problem:

Ich leite eine F[illegible] auf und [illegible]che dies a[illegible]tammfunktion wieder rückgängig.

a1) f[illegible] $= x^3 - x^2 + 1$ [illegible]efert [illegible] $3x^2 - 2x$, also ist $dy = (3x^2 - 2x) \cdot dx$.
[illegible] Stammfunktion von [illegible] $(x) = 3x^2 - 2x$ ist also $f(x) = \int (3x^2 - 2x)\,dx = x^3 - x^2 + \boxed{1}$
Ic[illegible]e als Ergebnis ei[illegible]ch die gegebene Funktion verwendet.

a2) $f_1(x) = x$ [illegible] $^2 + \boxed{5}$ [illegible]efert $f_1'(x) = 3x^2 - 2x$, also ist $dy = (3x^2 - 2x) \cdot dx$.
Die Stammfu[illegible] von $f_1'(x) = 3x^2 - 2x$ ist also $f(x) = \int (3x^2 - 2x)\,dx = x^3 - x^2 + \boxed{5}$
Ich habe auch hier als Ergebnis die gegebene Funktion verwendet.

Die Funktion $f'(x) = 3x^2 - 2x$ hat also beliebig viele Stammfunktionen, die sich alle nur im Absolutglied unterscheiden:

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 2x} \underset{\text{Ableiten}}{\overset{\text{Aufleiten zur Stammfunktion}}{\rightleftarrows}} \boxed{f(x) = x^3 - x^3 + C,\ \ C \in \mathbb{R}}$$

DEMO

Noch so ein Beispiel:

b1) $f(x) = x^2 + 3x - 2$ liefert $f'(x) = 2x + 3$, also ist $dy = (2x+3)dx$

Die Stammfunktion von $f'(x) = 2x + 3$ ist daher $f(x) = \int (2x+3)dx = x^2 + 3x - \boxed{2}$

b2) $f(x) = x^2 + 3x + \boxed{8}$ liefert $f'(x) = 2x + 3$, also ist $dy = (2x+3)dx$

Die Stammfunktion von $f'(x) = 2x + 3$ ist dann hier $f(x) = \int (2x+3)dx = x^2 + 3x + \boxed{8}$

$$\boxed{f'(x) = 2x + 3} \underset{\text{Ableiten}}{\overset{\text{Aufleiten zur Stammfunktion}}{\rightleftarrows}} \boxed{f(x) = x^2 + 3x + C,\ \ C \in \mathbb{R}}$$

Merke:

Da beim Ableiten einer Funktion das Absolutglied verschwindet, kann es bei der Umkehrung, also dem Integrieren bzw. Aufleiten (ohne eine zusätzliche Angabe) nicht rekonstruiert werden.

Daher spricht man auch nicht von „der" Stammfunktion sondern eines von <u>einer</u> Stammfunktion.

Für die gezeigten Beispiele löst man das Problem so, dass man der Stammfunktion eine Konstante C als Absolutglied gibt:

$$\int (3x^2 - 2x)dx = x^3 - x^2 + C$$

$$\int (2x+3)dx = x^2 + 3x + C$$

Stammfunktionen mit diesem Summanden + C nennt man auch **unbestimmte Stammfunktionen**. In Abschnitt [illegible] wird gezeigt auf welche Weise man dieses C bestimmen kann, wie man also dann eine **bestimmte Stammfunktion** erhält.

DEMO

1.2 Potenzregel zum Aufleiten:

Ich nenne die gegebene Funktion f und die Stammfunktion F.

Mein Vorgehen sieht so aus: Ich zeige, wie die Stammfunktion entsteht und bestätige dies durch die Probe, bei der ich durch Ableiten der Stammfunktion zeige: $F'(x) = f(x)$

(1) $f(x) = x^2$ $\quad F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ oder $= \frac{1}{3}x^3 + C$ $\quad$ Probe: $F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$

(2) $f(x) = x^3$ $\quad F(x) = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ oder $= \frac{1}{4}x^4 + C$ $\quad$ Probe: $F'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3$

(3) $f(x) = x^8$ $\quad F(x) = \int x^8 dx = \frac{x^9}{9} + C$ oder $= \frac{1}{9}x^9 + C$ $\quad$ Probe: $F'(x) = \frac{1}{9} \cdot$ [illegible] x^8

Die Potenzregel lautet:

(4) $\boxed{f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad F(x) = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}}$ [illegible] solange $n \neq -1$ is[illegible]

In Worten:

Der Exponent wird um 1 erhöht, anschließend teil[illegible]an [illegible]h den neuen Exponenten.

Die Potenzregel gilt auch für negativ[illegible]xpo[illegible]n, a[illegible]o einfache Bruchfunktionen:

(5) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $\quad F(x)$ [illegible] $\frac{1}{x^2}dx = \boxed{\int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C} = -$ [illegible] C

(6) $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ $\quad$ [illegible]$x) = \int \frac{1}{x^3}$ [illegible] $\boxed{\int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C} = -\frac{1}{2x^2} + C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + C$

(7) Sie kann nicht gelten für [illegible]1, wie folgen[illegible]echnung zeigt:

$f($[illegible] $\frac{1}{x} = x^{-1}$ [illegible] $) = \int \frac{1}{x}$ [illegible] $\boxed{\int \frac{1}{x}dx \neq \cancel{\frac{x^0}{0}} + C}$, denn durch 0 kann man nicht teilen.

[illegible]n man weiß, dass d[illegible]Funktion $f(x) = \ln(x)$ die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{x}$ hat, wird dieses

Ausna[illegible] Integral ve[illegible]ndlich: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

Der Betrag [illegible]tigt, weil diese Regel auch für negative x-Werte gelten muss.

Nun zwei Integrale mit einem konstanten Faktor: Er bleibt beim Aufleiten unverändert:

(8) $\int \frac{2}{x^4}dx = \boxed{\int 2 \cdot x^{-4}dx = 2 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} + C} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + C$ $\quad$ mit dem Konstanten Faktor 2.

(9) $\int \frac{1}{2x^2}dx = \boxed{\int \frac{1}{2} \cdot x^{-2}dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + C$ $\quad$ oder $= -\frac{1}{2x} + C$

Dieses Beispiel fällt Schülern schwer, weil der Faktor 2 im Nenner steht und der konstante Faktor daher nicht 2 sondern $\frac{1}{2}$ ist!

DEMO

Die Potenzregel gilt auch für Bruch-Exponenten, also einfache Wurzelfunktionen:

Daran muss man sich erinnern: $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, $x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x}$, $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$

$$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

(10) $$\int \sqrt{x}\,dx = \boxed{\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C} = \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \tfrac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

Zur Probe leitet man ab: $\left(\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C\right)' = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\ }$

(11) $$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \boxed{\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C} = 2\sqrt{x} + C$$

Probe durch Ableiten: $\left(2\sqrt{x} + C\right)' = \left(\ ^{\frac{1}{2}} + C\right)' = \ ^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Noch zwei Integrationen mit konstanten Faktoren:

(12) $$\int \sqrt{\frac{x}{2}}dx = \int \sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{x}\,dx = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\int x \ = \sqrt{2}\ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} + C = \ \sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot x\sqrt{x} + C$$

Es gibt dazu ein ... rinierte Nebenrech...: $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}{3\cdot\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

(13) $$\int \frac{3}{\sqrt{2x}}dx = \int \ \frac{1}{\sqrt{x}}dx \ \frac{}{\sqrt{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{3\cdot 2}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{x} + C = 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{x} + C$$

... der N... rechnun... $\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\ }\ \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} = 3\sqrt{2}$

Zusamme... ung:

... Potenzregel gilt für alle Exponenten außer -1.

Für.. $n \neq -1$ gilt: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Für $n = -1$ gilt: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

DEMO

Trainingsaufgabe 1

a) $\int x^6 dx$ b) $\int 6x^3 dx$ c) $\int \frac{x^2}{2} dx$ d) $\int 3x\, dx$ e) $\int \frac{3}{2} x^5 dx$

Trainingsaufgabe 2

a) $\int \frac{1}{x^4} dx$ b) $\int \frac{8}{x^3} dx$ c) $\int \frac{1}{4x^5} dx$ d) $\int \frac{6}{5x^2} dx$ e) $\int \frac{1}{2x} dx$

Trainingsaufgabe 3

a) $\int x\sqrt{x}\, dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ c) $\int \sqrt{3x}\, dx$ d) $\int \frac{1}{\sqrt{3x}} dx$ $\int \frac{1}{2x\sqrt{x}} dx$

Trainingsaufgabe 4

Anleitung: Eine Summe leitet man ab, indem man die einzelnen S[illegible]mmanden getrennt a[illegible]tet.
Das gilt natürlich dann auch für die Umkeh[illegible]also für [illegible]eiten bzw. Intec[illegible]en.

a) $\int (3x+1)\, dx$ b) $\int (x^2 - [illegible]$

c) $\int \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) dx$ [illegible] $\int \left(\frac{1}{3}x^3 - 2[illegible] + 2\right) dx$

e) $\int \left(2x^4 - x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x + 5\right) dx$ $\int ([illegible]^4 + 4[illegible] - 5x^2 + 4x - 7)\, dx$

g) $\int (-x+2)^2\, dx$ h) [illegible]$^2 - x + 3)$ d[illegible]

i) $\int x(x^2 - 4x + 3)\, dx$ j) $\int (x^[illegible](x+1)\, dx$

DEMO

2 Bestimmte Stammfunktionen

Beispiele

a) Welche Stammfunktion zu $f(x) = x^2$ geht durch den Punkt $A(2\,|\,-1)$?

Zunächst berechnet man die allgemeine Stammfunktion: $F(x) = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

Weil deren Schaubild durch $A(2\,|\,-1)$ gehen, haben wir diese

Bedingung: $F(2) = -1$

Wegen $F(2) = \frac{1}{3} \cdot 8 + C$

Es folgt: $\frac{8}{3} + C = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{3} + C = -1 \quad \Rightarrow \quad C = -1 - \frac{8}{3} = -\frac{11}{3}$

Ergebnis: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{3}$

Probe: $F(2) = \frac{1}{3} \cdot 8 - \frac{11}{3} = \frac{8-11}{3} = -\frac{3}{3} = -$

b) Welche Stammfunktion zu $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$ geht durch d[illegible] Punkt $P(0\,|\,2)$?

Allgemeine Stammfunktion: $F(x) = \int (4x^2 - 3x$ [illegible] $= 4\frac{x}{3}$ [illegible] x^2 [illegible] $+ 5x + C$

Bedingung: $F(0) = 2$

Andererseits ist $F(0) = C$

Also folgt: C [illegible]

Ergebnis: $F(x) =$ [illegible] $-\frac{3}{2}x$ [illegible] 2

c) Bestimme die Stamm[illegible]ktion zu $f($[illegible]$) = \frac{2x^4 +}{x^3}$ [illegible]ren Schaubild durch $R(\sqrt{2}\,|\,1)$ geht.

Allgemeine Stammf[illegible]on:

$$F(x) = \int \frac{2x^4 + 1}{\text{[illegible]}} dx = \int \left(\text{[illegible]} \frac{1}{x^3} \right) dx = \int (\text{[illegible]}\, x^{-3}) dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^{-2}}{-2} + C = x^2 - \frac{1}{2x^2} + C$$

[illegible]erst nach dies[illegible] formunge[illegible] [illegible]et [illegible] die Stammfunktion

Bedingung: $F($[illegible]$2) = 1$

Andererseits ist $F(\sqrt{2}) = 2 - \frac{1}{4} + C = \frac{7}{4} + C$

[illegible] wird $\frac{7}{4} + C = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = 1 - \frac{7}{4} = -\frac{3}{4}$

Ergebnis: $F(x) = x^2 - \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{4}$

d) Bestimme die Stammfunktion zu $f(x) = \sqrt{2x}$, deren Schaubild durch $R(9\,|\,18\sqrt{2})$ geht.

$$F(x) = \int \sqrt{2x}\, dx = \int \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} \cdot dx = \sqrt{2} \cdot \int x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{2} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{x}^3 + C$$

Bedingung: $F(9) = 18\sqrt{2}$

Andererseits: $F(9) = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{9}^3 + C = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3^3 + C = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 27 + C = 18 \cdot \sqrt{2} + C$

Daraus folgt: $18\sqrt{2} + C = 18\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad C = 0$

Ergebnis: $F(x) = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x}^3$

DEMO

Trainingsaufgabe 5

	Stammfunktion zu	durch
a)	$f(x)=\frac{1}{3}x^4+2x^2-5$	$A(1\mid 2)$
b)	$f(x)=\frac{1}{2}x^2+4x-12$	$Q(0\mid 2)$
c)	$f(x)=\frac{4}{x^2}$	$P(3\mid 4)$
d)	$f(x)=\frac{5x^2+2x}{x^2}$	$B(1\mid 3)$
e)	$f(x)=\frac{2-x}{4x}$	$C(1\mid 1)$
f)	$f(x)=x^2-x+\frac{4}{x^2}$	$T(2\mid 12)$
g)	$f(x)=\frac{2}{3x}$	$U(e\mid$ [illegible]

Trainingsaufgabe 6

	Stammfunktion zu	durch
a)	$f(x)=$ [illegible]	$A($ [illegible] $\mid 60)$
b)	$f(x)=\sqrt{2x}$	[illegible]
c)	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$C(16\mid -2)$
d)	$f(x)=\sqrt{x}+2x$	$D(2\mid 0)$
e)	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x}}$	$C(3\mid 1)$
f)	$f(x)=\frac{x+}{}$ [illegible]	$R(4\mid \frac{1}{3})$

DEMO